SS 2015 Analysis 4 LB Übungen Blatt 11

Notiztitel 06.05.2011

T31 $\underline{v}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \le 0\}$ ← einfach zus. hgd. ✓

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - (x^2-y^2)\cdot 2\cancel{(x^2+y^2)}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-6yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{2y(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - 2xy\cdot 2\cdot\cancel{(x^2+y^2)}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-6yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$ ✓

⇒ Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt. ✓

⇒ $\exists\, U(x,y)$ mit $\operatorname{grad} U(x,y) = -\underline{v}(x,y)$ d.h.

wegen Physik!

$U_x = v_1(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (1)

über y integrieren ⇒ $x = \text{const}$

Konst. abh. von x!

$U_y = v_2(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ (2) $\quad U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + C(x)$

$$\Rightarrow U_x = \frac{x^2+y^2-x2x}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) \overset{(1)}{=} \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

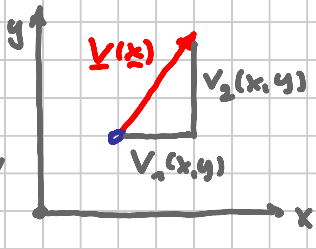
$\Leftrightarrow C'(x) = 0 \Leftrightarrow C(x) = \text{const} \Rightarrow \underline{U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + C}$

Äquipotentiallinien:

$U(x,y) = \text{const} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \text{const} = \frac{1}{2d} \Leftrightarrow x^2 - 2dx + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-d)^2 + y^2 = d^2$ Kreise um $(d,0)$ durch $O=(0,0)$.

$\underline{v}(x_0,y_0) = -\operatorname{grad} U(x_0,y_0) \perp U(x,y) = U(x_0,y_0)$



DGL der Feldlinien Orthogonaltrajektorien der Äquipot.-linien!

$$y' = \frac{V_2(x,y)}{V_1(x,y)} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \quad (*)$$

Subst. $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = x\cdot z(x) \Rightarrow y' = z(x) + x z'(x) \overset{(*)}{=} \frac{2z(x)}{1-z^2(x)}$

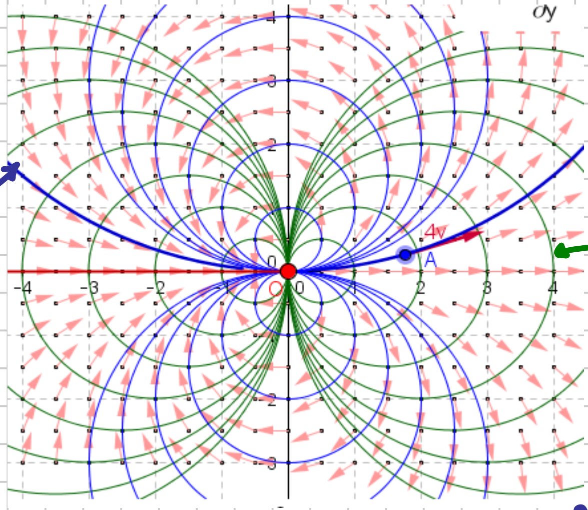
$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2z}{1-z^2} - z\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{z+z^3}{1-z^2}\right) \Leftrightarrow \frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1+z^2}\right)dz = \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow \ln z - \ln(1+z^2) = \ln x - \ln 2C,\ C>0$

$\Leftrightarrow \frac{z}{1+z^2} = \frac{x}{2C} \overset{\text{Re-Subs.}}{\Leftrightarrow} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x}{2C} \Leftrightarrow x^2+y^2-2Cy = 0 \Leftrightarrow x^2+(y-C) = C^2$

Kreise um $(0,C)$ durch O!

Feldlinien (Orthogonaltrajektorien der Äquipotentiallinien)



Äquipotentiallinien $U(x,y) = \text{const.}$

T 32 $\underline{v}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot}\,\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\cdot\begin{pmatrix}-2zy+2yz\\-2zx+2xz\\-2yx+2xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ Integrabilitäts bed. erfüllt

$\Rightarrow \exists\, U(x,y,z)$ mit $\text{grad}\, U(x,y,z) = -\underline{v}(x,y,z)$

wegen Physik

1. Weg:

$U_x = -v_1(x,y,z) = \frac{-x}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow U(x,y,z) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + \underline{C}(y,z)$

$U_y = -v_2(x,y,z) = \frac{-y}{x^2+y^2+z^2} \overset{!}{=} U_y = \frac{-y}{x^2+y^2+z^2} + C_y \Leftrightarrow C_y = 0$

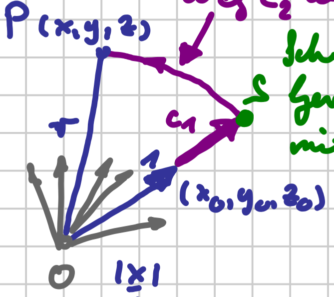
$\Rightarrow C(y,z) = \tilde{C}(z)$

$U_z = -v_3(x,y,z) = \frac{-z}{x^2+y^2+z^2} \overset{!}{=} U_z = \frac{-z}{x^2+y^2+z^2} + \tilde{C}_z \Leftrightarrow \tilde{C}_z = 0$

$\Rightarrow \tilde{C}(z) = \text{const.}$

$\Rightarrow U(x,y,z) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + \text{const}$

2. Weg: Wähle Kurve c von $\underline{x}_0$ mit $|\underline{x}_0| = 1$ nach $\underline{x} = (x,y,z) \neq (0,0,0)$ auf Kugel um 0 mit Radius $r>0$



$U(x,y,z) = -\int_c \underline{v}\, d\underline{x} = -\int_{c_1} \underline{v}\, d\underline{x}_1 - \underbrace{\int_{c_2} \underline{v}\, d\underline{x}_2}_{=0 \text{ da Weg } c_2 \perp \underline{v}} = -\int_{t=1}^{|\underline{x}|} \underline{v}(t\cdot\underline{x}_0)\cdot\underline{x}_0\, dt$

$c_1: t\cdot\underline{x}_0$, $t=1$ bis $r=|\underline{x}|$

$-\int_{t=1}^{|\underline{x}|} \frac{1}{t^2\cdot\underline{x}_0^2}\cdot t\,\underline{x}_0\cdot\underline{x}_0\, dt = -\int_{t=1}^{|\underline{x}|} \frac{1}{t}\, dt = -\ln|\underline{x}| = -\frac{1}{2}\ln|x|^2 = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$

b) $\oint_c \underline{v}\, d\underline{x}$ über Kreis $\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_c \underline{v}\, d\underline{x} = \int_0^{2\pi} \underline{v}(\underline{x}(t)) \cdot \dot{\underline{x}}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \cdot (\underbrace{-\cos t \sin t + \sin t \cos t}_{=0})\, dt = 0$$

<u>Bem</u>: Da $\underline{v}(\underline{x})$ an der Stelle $(0,0,0)$ nicht definiert ist, folgt aus $\mathrm{rot}\, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{0}$ nur im einfach zusammenhängenden Gebiet ohne $(0,0,0)$ z.B. $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0,0) \mid x \leq 0\}$, dass $U(\underline{x})$ existiert und $\oint \underline{v}\, d\underline{x} = 0$ für jede geschlossene Kurve $c \subset D$.
Der Kreis umschließt aber $(0,0,0)$ $\Rightarrow$ $\oint \underline{v}\, d\underline{x}$ muss eigens berechnet werden.