SS 2015 Analysis 4 LB Hausaufgaben Blatt 7

Notiztitel 06.05.2011

H12: ⓐ Extrema von $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ im Inneren $x^2+y^2<1$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 8x - 3y \overset{!}{=} 0 \\ f_y = -3x \overset{!}{=} 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = y = 0, \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow \underline{(0,0) \text{ ist Sattelpunkt}}$$

ⓑ Extrema von $f(x,y)$ auf dem Rand $x^2+y^2=1$, d.h. unter der Nebenbedingung $h(x,y) := x^2+y^2-1 = 0$

LAGRANGE-Hilfsfunktion

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot h(x,y) = 4x^2 - 3xy + \lambda(x^2+y^2-1)$$

Notwendig für lokale Extrema

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & L_x = 8x - 3y + 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \\ (\mathrm{II}) & L_y = -3x + 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \\ (\mathrm{III}) & L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \end{array}$$

(I) und (II) liefern hier das Eigenwertproblem für die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -3/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x^2+y^2=1 \ (\mathrm{III})$$

$$(\mathrm{I})\text{-}(\mathrm{III}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+\lambda & -3/2 \\ -3/2 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } x^2+y^2=1, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS nichttrivial lösbar $\Leftrightarrow$ Determinante der Koeff.matrix $= 0$

$$\det \begin{pmatrix} 4+\lambda & -3/2 \\ -3/2 & \lambda \end{pmatrix} = 4\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{4} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+9}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{cases} \text{ („EW")}$$

① $\underline{\lambda = \frac{1}{2}}$: $\begin{pmatrix} 9/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

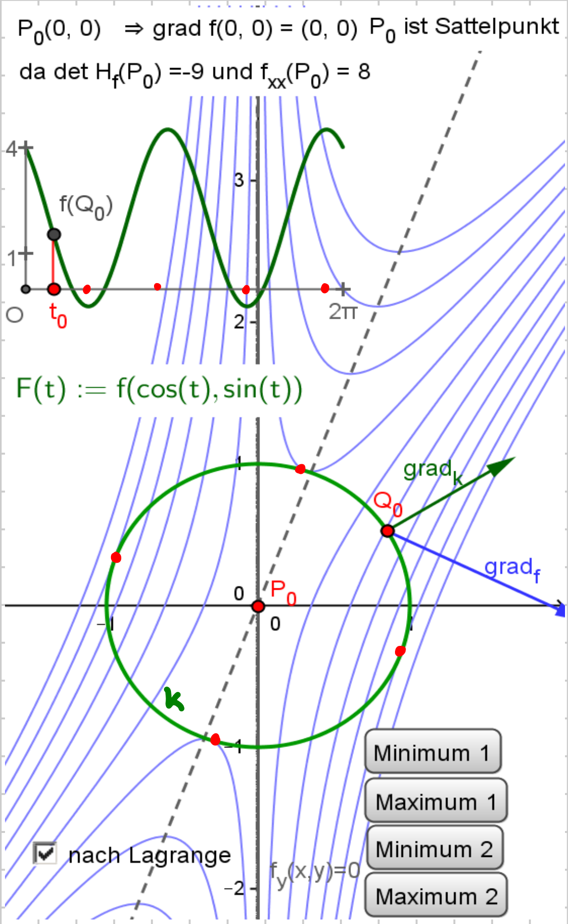
② $\underline{\lambda = -\frac{9}{2}}$: $\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ -3/2 & -9/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

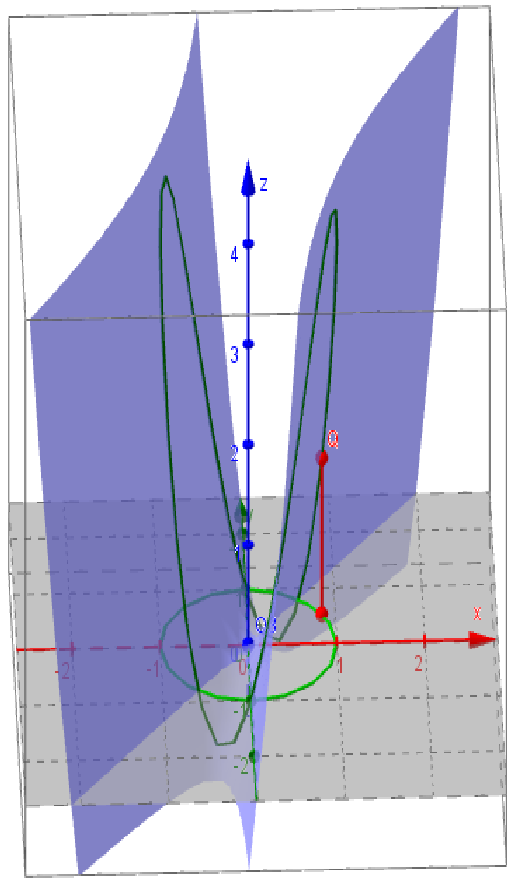
normierte Eigenvektoren

Für ① gilt: $f(x,y) = 4 \cdot \frac{1}{10} - 3 \cdot \frac{3}{10} = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist Minimalstelle

Für ② gilt: $f(x,y) = 4 \cdot \frac{9}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} = \frac{45}{10}$ $\Rightarrow$ $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Maximalstelle

$f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ Nebenbed. $x^2 + y^2 \leq 1$





Alternativ: Mit Parameterdarstellung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ gilt

längs k: $F(t) := f(\cos t, \sin t) = 4\cos^2 t - 3\cos t \cdot \sin t$

$\Rightarrow \quad F'(t) = -8\cos t \sin t + 3\sin^2 t - 3\cos^2 t = -4\sin(2t) - 3\cos(2t)$

$\Rightarrow F'(t) = 0 \Leftrightarrow \tan(2t) = -\frac{3}{4} \Rightarrow t \in \{1.25;\ 2.82;\ 4.39;\ 5.96\}$