SS 2015 Analysis 4 LB Übungen Blatt 6

Notiztitel 30.05.2011

**T18.** Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x,y)$ um den Mittelpunkt $(0,0)$

$$f(x,y) = f(0,0) + [f_x(0,0)\cdot x + f_y(0,0)\cdot y] + \tfrac{1}{2}[f_{xx}(0,0)\cdot x^2 + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\cdot y^2] +$$
$$+ (\text{Terme höherer Ordnung in } x \text{ und } y)$$

a) $f(x,y) = e^{x \sin y} \overset{\text{Entwicklung von } e^u}{=} 1 + \frac{1}{1!}(x\sin y) + \frac{1}{2!}(x \sin y)^2 + \ldots$

$$\underset{\text{Entwicklung von } \sin y}{=} 1 + 1\cdot[x\cdot(y - \tfrac{1}{3!}y^3 + \ldots)] + \tfrac{1}{2}[x\cdot(y - \tfrac{1}{3!}y^3 + \ldots)]^2 + \ldots$$

$$= 1 + xy + (\text{Terme höherer Ordnung in } x \text{ und } y)$$

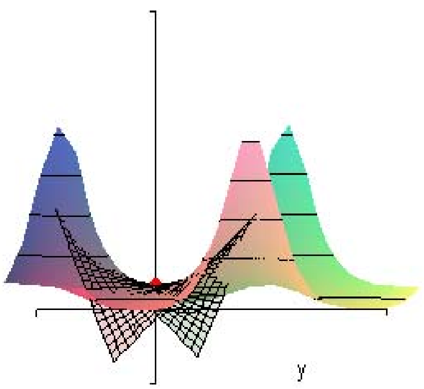
b) $\Rightarrow f(0,0) = 1,\ f_x(0,0) = 0,\ f_y(0,0) = 0,\ f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0,\ f_{xy}(0,0) = 1$

c) Die lineare Ersatzfunktion ist konstant: $\underline{f_1(x,y) = f_0(x,y) = 1}$

Die quadratische Ersatzfunktion $\underline{f_2(x,y) = 1 + xy}$ ist ein hyperbolischer Paraboloid.

Damit hat die Funktion $f(x,y)$ an der Stelle $(0,0)$ eine horizontale Tangentenebene, jedoch kein Extremum, da $f_2(x,y)$ für $(x<0 \wedge y>0)$ oder $(x>0 \wedge y<0)$ kleiner als 1 und für $(x>0 \wedge y>0)$ oder $(x<0 \wedge y<0)$ größer als 1 ist.

$(0,0)$ ist ein Sattelpunkt von $f$ $\quad \left(\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1\right)$




Weitere stationäre Stellen

$f_x = \sin y\, e^{x \sin y} \overset{!}{=} 0$

$f_y = x \cos y\, e^{x \sin y} \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{y = k\cdot\pi} \\ \underline{x = 0} \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$f_{xx} = \sin^2 y\, e^{x \sin y}$

$f_{xy} = (\cos y + \sin y\, x \cos y)e^{x \sin y}$

$f_{yy} = (-x \sin y + x^2 \cos^2 y)e^{x \sin y}$

$\Rightarrow H_f(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(k\pi) \\ \cos(k\pi) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(0,k\pi) = -1 < 0 \Rightarrow$ alles Sattelpunkte

Siehe auch Geogebra 3D-Figur T18-3D.ggb

**T19** $f(x,y) = (y^3-3y^2)x + \frac{x^3}{3}$

a) $f(t,0) = \frac{t^3}{3} \to \lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t,0) = \pm\infty \Rightarrow$ es gibt keine globalen Extrema

b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3-3y^2+x^2 \\ (3y^2-6y)x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I) $y^3-3y^2+x^2=0$

II) $(3y^2-6y)x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1)\; x=0 \\ (2)\; y=0 \\ (3)\; y=2 \end{array}\right\}$ in I eingesetzt

(1) $x=0 \Rightarrow y^2(y-3)=0 \Rightarrow y=0$ oder $y=3 \Rightarrow P_1(0,0)$, $P_2(0,3)$

(2) $y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ (nichts neues)

(3) $y=2 \Rightarrow -4+x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow P_3(-2,2)$, $P_4(2,2)$

Es gibt also 4 stationäre Stellen $P_{1,2,3,4}$

Bestimmung der Art der stationären Stellen mit Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2-6y \\ 3y^2-6y & (6y-6)x \end{pmatrix}$$

$P_1$) $\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. keine Aussage!

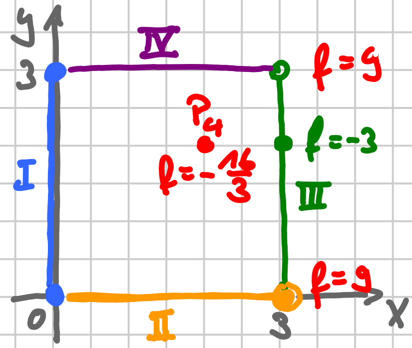
wegen a) ist aber $P_1(0,0)$ ein Sattelpunkt, da in jeder Umgebung von $(0,0)$ positive und negative Funktionswerte vorkommen.

$P_2$) $\det H_f(0,3) = \det\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = -81 < 0 \Rightarrow P_2(0,3)$ ist Sattelpunkt

$P_3$) $\left.\begin{array}{l} \det H_f(-2,2) = \det\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = 48 > 0 \\ \text{und } f_{xx}(-2,2) = -4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_3(-2,2)$ ist lokale Maximumstelle

$P_4$) $\left.\begin{array}{l} \det H_f(2,2) = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 48 > 0 \\ \text{und } f_{xx}(2,2) = 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_4(2,2)$ ist lokale Minimumstelle

c) $M := [0,3] \times [0,3]$




① stationäre Stellen im Inneren von $M$: $P_4(2,2)$ mit $\underline{f(2,2) = -\frac{16}{3}}$

② Randkurven mit Ecken:

I) $x=0$, $0 \le y \le 3$ $\Big\}$ $h(y) := f(0,y) = 0$, $0 \le y \le 3$ $\Rightarrow$ $f$ längs I konst. $=0$ !

II) $y=0$, $0 \le x \le 3$ $\Big\}$ $g(x) := f(x,0) = \frac{x^3}{3}$ für $0 \le x \le 3$ streng monoton steigend $\Rightarrow$ $f(0,0)=0$ minimal, $\underline{f(3,0)=9}$ maximal längs II. Ecken!

III) $x=3$, $0 \le y \le 3$ $\Big\}$ $\bar{h}(y) := f(3,y) = 3y^3 - 9y^2 + 9$ für $0 \le y \le 3$

$\bar{h}'(y) = 9y^2 - 18y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow y=0$ oder $y=2$

$\bar{h}''(y) = 18y - 18 \Rightarrow \bar{h}''(0) = -18 \Rightarrow \underline{f(3,0)=9}$ maximal

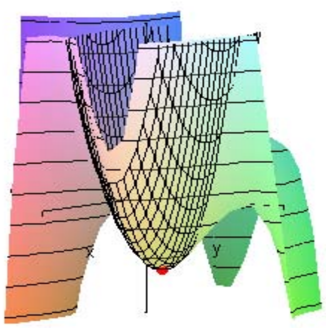
$\bar{h}''(2) = 18 \Rightarrow f(3,2) = -3$ minimal

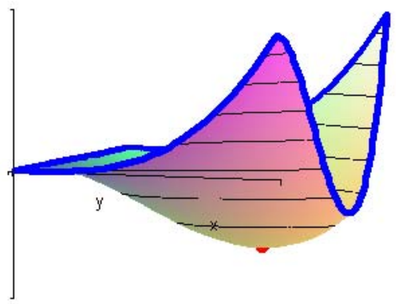
und Ecke $\underline{f(3,3) = 9}$ längs III

IV) $y=3$, $0 \le x \le 3$ $\Big\}$ $\bar{g}(x) := f(x,3) = \frac{x^3}{3}$ für $0 \le x \le 3$ streng monoton steigend $\Rightarrow$ $f(0,3)=0$ minimal, $\underline{f(3,3)=9}$ maximal längs IV. Ecken!

Da $M \neq \emptyset$ abgeschlossen und beschränkt (kompakt) und $f$ stetig ist, nimmt $f$ auf $M$ sein Minimum und Maximum an

$\Rightarrow f(M) = [-\frac{16}{3}, 9]$ mit absolutem Minimum an der Stelle $P_4(2,2)$ und absoluten Maximum an $(3,0)$ und $(3,3)$





Vgl. auch Geogebra 3D-File: T19-3D.ggb