SS 2015 Analysis 4 LB Hausaufgaben Blatt 06

Notiztitel 06.05.2011

H10: $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3 \Rightarrow \begin{array}{l} f_x = -3y^2 + 3x^2 = 3\cdot(x^2-y^2) \\ f_y = 4y^3 - 6xy = 2y(2y^2-3x) \end{array}$

$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = -6y, \quad f_{yy} = 12y^2 - 6x$

a) $T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}^T H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

mit $(x_0,y_0) = (\frac{3}{2},\frac{3}{2}) \Rightarrow f(x_0,y_0) = f(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^4 - 3(\frac{3}{2})^3 + (\frac{3}{2})^3 = (\frac{3}{2}-2)(\frac{3}{2})^3 = \underline{\frac{-27}{16}}$

$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T_2(x,y) = -\frac{27}{16} + \frac{9}{2}(x-\frac{3}{2})^2 - 9(x-\frac{3}{2})(y-\frac{3}{2}) + 9\cdot(y-\frac{3}{2})^2$

b) <u>stationäre Stellen:</u> $\operatorname{grad} f \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f_x = 3(x+y)(x-y) \overset{!}{=} 0 \quad (a) \\ f_y = 2y(2y^2-3x) \overset{!}{=} 0 \quad (b) \end{array}$

$(a) \Rightarrow \begin{cases} x = y \overset{(b)}{\Rightarrow} 2y^2(2y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{3}{2}; & B(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) & f(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16} \\ x = y = 0; & A(0,0) & f(0,0) = 0 \end{cases} \\ x = -y \overset{(b)}{\Rightarrow} 2y^2(2y+3) = 0 \Rightarrow \{ x = -y = \frac{3}{2}; \quad C(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) \quad f(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16} \end{cases}$

Untersuchung von A, B, C mit Hilfe der Hesse-Matrix H_f:

<u>A:</u> $\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ aber $\left\{ \begin{array}{l} f(x,0) > 0 \text{ für } x > 0 \\ f(x,0) < 0 \text{ für } x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ A ist Sattelpunkt

<u>B:</u> $\det H_f(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \det\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} = 81 > 0$; $f_{xx} = 9 > 0 \Rightarrow$ B lok. Minimum

<u>C:</u> $\det H_f(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = \det\begin{pmatrix} 9 & +9 \\ +9 & 18 \end{pmatrix} = 81 > 0$, $f_{xx} = 9 > 0 \Rightarrow$ C lok. Minimum

Beachte die Symmetrie von $z = f(x,y)$ zur x-Achse $f(x,-y) = f(x,y)$!

f besitzt auf $\mathbb{R}^2$ keine globalen Extremstellen, da

$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$.

c) Für globale Extremstellen im Rechteck $R := \{(x,y) \mid |x| \le \frac{5}{2}, |y| \le 2\}$ kommen in Frage:

① die Randeckpunkte:

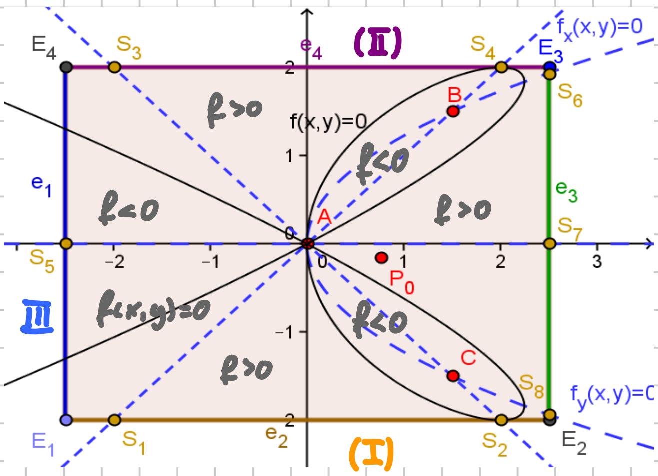
$$f(E_1)=f(E_4)=\frac{243}{8} < 32$$

$$f(E_2)=f(E_3)=\frac{13}{8}$$

② die Extrema im Inneren

$$f(B)=f(C)=-\frac{27}{16}$$

③ die Extrema auf dem Rand



(I) $y=-2,\ f(x,-2)=16-12x+x^3$
$\Rightarrow \frac{df}{dx}=-12+3x^2\overset{!}{=}0 \Leftrightarrow x=\pm 2$ $\Bigg\}\Rightarrow$ $S_1(-2,-2)$ mit $f(S_1)=32$; $S_2(2,-2)$ mit $f(S_2)=0$

(II) $y=2,\ f(x,2)=16-12x+x^3$
$\Rightarrow \frac{df}{dx}=-12+3x^2\overset{!}{=}0 \Leftrightarrow x=\pm 2$ $\Bigg\}\Rightarrow$ $S_3(-2,2)$ mit $f(S_3)=32$; $S_4(2,2)$ mit $f(S_4)=0$

(III) $x=-\frac{5}{2},\ f(-\frac{5}{2},y)=y^4+\frac{15}{2}y^2-\frac{125}{8}$
$\Rightarrow \frac{df}{dy}=4y^3+15y\overset{!}{=}0 \Leftrightarrow y=0$ $\Bigg\}\Rightarrow$ $S_5(-\frac{5}{2},0)$ mit $f(S_5)=-\frac{125}{8}$

(IV) $x=\frac{5}{2},\ f(\frac{5}{2},y)=y^4-\frac{15}{2}y^2+\frac{125}{8}$
$\Rightarrow \frac{df}{dy}=4y^3-15y\overset{!}{=}0 \Leftrightarrow y=0 \vee y=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ $\Bigg\}\Rightarrow$ $S_{6,8}(\frac{5}{2},\pm\frac{\sqrt{15}}{2})$ mit $f(S_{6,8})=\frac{25}{16}$; $S_7(\frac{5}{2},0)$ mit $f(S_7)=\frac{125}{8}$

Der direkte Vergleich der Funktionswerte ergibt:

globales $\begin{cases}\text{Maximum von } f \text{ auf } R \text{ in } S_1 \text{ und } S_3: & f_{max}=32\\ \text{Minimum von } f \text{ auf } R \text{ in } S_5: & f_{min}=-\frac{125}{8}\end{cases}$

H11: $W(x,t)=x^2(a-x)t^2e^{-t}, \quad 0\le x\le a, \quad t\ge 0$

I) $W_x=(2ax-3x^2)t^2e^{-t}\overset{!}{=}0$

$\Rightarrow x=0$ oder $x=\frac{2}{3}a$ oder $t=0$

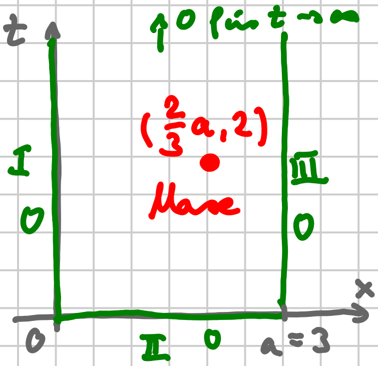
II) $W_t=x^2(a-x)(2t-t^2)e^{-t}\overset{!}{=}0$

$\Rightarrow x=0$ oder $x=a$ oder $t=0$ oder $t=2$

$\Rightarrow$ stationäre Stellen: $(0,t),\ t\ge 0$; $(x,0),\ 0\le x\le a$; $(\frac{2}{3}a,2)$

$\underbrace{W(0,t)}_{x=0}=\underbrace{W(x,0)}_{t=0}=0$ (globales Minimum, da $W(x,t)\ge 0$ im Streifen! für $0\le x\le a$)

$W(\frac{2}{3}a, 2) = \frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{1}{3}a \cdot 4 \cdot e^{-2} = \frac{16}{27}a^3 e^{-2}$



Rand:

I) $x = 0 \Rightarrow W(0,t) = 0$ für alle $t \geq 0$

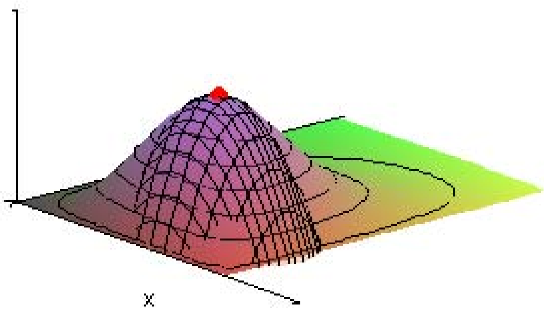
II) $t = 0 \Rightarrow W(x,0) = 0$ für alle $x \in [0,a]$

III) $x = a \Rightarrow W(a,t) = 0$ für alle $t \geq 0$

$\lim_{t \to \infty} W(x,t) = 0$ für alle $x = [0,a]$

Damit liegt das globale Maximum bei $(\frac{2}{3}a, 2)$ und hat den Wert $\frac{16}{27}a^3 e^{-2}$.

Anmerkung: Auf die rechenintensive Berechnung der Hesse-Matrix kann hier verzichtet werden, da $(\frac{2}{3}a, 2)$ mit $f(\frac{2}{3}a, 2) = \frac{16}{27}a^3 e^{-2}$ einziger Kandidat für ein Maximum ist und f auf den Rändern und für $t \to \infty$ verschwindet.



Betrachte auch Geogebra 3D-File: H10-3D.ggb insbesondere die Taylor-Formel 2. Ordnung längs der Koordinatenachsen.