SS 2015 Analysis 4 LB Hausaufgaben Blatt 5

Notiztitel 06.05.2011

H 9. Durch $F(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) \overset{!}{=} 0$ implizit geg. Kurve

a) $c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0\}$

Punkt (x_0, y_0) mit $x_0 = 1$ und $y_0 > 0$

$\Leftrightarrow (1+y^2)^2 - 2(1-y^2) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2y^2 + y^4 - 2 + 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^4 + 4y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -2 \underset{(-)}{+} \sqrt{4+1} \Leftrightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$

$\Rightarrow (x_0, y_0) = (1, \sqrt{-2+\sqrt{5}})$

b) Normale zu c in (x_0, y_0) ist

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) \\ F_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_0^2+y_0^2)\cdot 2x_0 - 4x_0 \\ 2(x_0^2+y_0^2)\cdot 2y_0 + 4y_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4(\cancel{1} - 2 + \sqrt{5}) - \cancel{4} \\ [4(\cancel{1} - \cancel{2} + \sqrt{5}) + \cancel{4}]\sqrt{-2+\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(-2+\sqrt{5}) \\ 4\sqrt{5}\sqrt{-2+\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -2+\sqrt{5} \\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{-2+\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Tangente: $\begin{pmatrix} -2+\sqrt{5} \\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{-2+\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y - \sqrt{-2+\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (-2+\sqrt{5})x + \sqrt{5}\sqrt{-2+\sqrt{5}}\cdot y + 2 - \sqrt{5} - \sqrt{5}(-2+\sqrt{5}) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{(-2+\sqrt{5})x + \sqrt{5}\sqrt{-2+\sqrt{5}}\cdot y - 3 + \sqrt{5} = 0}$

c) Tangenten in $(x,y) \in c$ an $c \parallel x$-Achse $\Leftrightarrow \operatorname{grad} F \parallel y$-Achse

$\Leftrightarrow$ $F(x,y) = (x^2+y^2) - 2(x^2-y^2) = 0$ (1) (Punkt auf c !)

$F_x = 4(x^2+y^2)x - 4x = 0$ (2) $\Rightarrow x = 0 \vee y^2 = 1 - x^2$ (2')

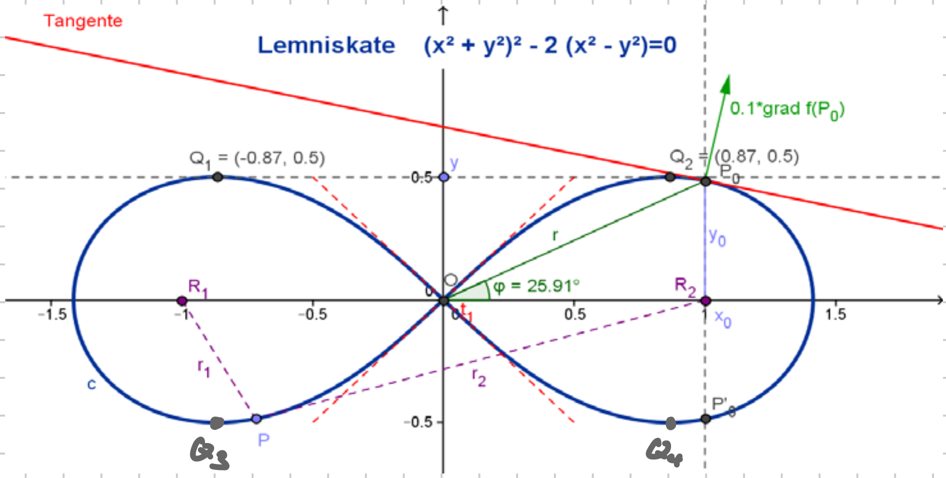
① $x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow F_y = 4(\underset{0}{x^2} + \underset{0}{y^2})\cdot \underset{0}{y} + 4\underset{0}{y} = 0$

d.h. $(x,y) = (0,0)$ ist ein singulärer Punkt von c (Doppelpunkt)

② $y^2 = 1 - x^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 1 - 2(x^2 - 1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\overset{(2')}{\Rightarrow} y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow Q_{1-4} = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pm\frac{1}{2})$



d) $P=(x,y)$, $R_1=(-1,0)$, $R_2=(1,0)$ $\Rightarrow$

$$|PR_1|\cdot|PR_2| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1 \quad |\uparrow^2$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)^2+y^2]\cdot[(x-1)^2+y^2] = 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2 + y^2(x-1)^2 + y^2(x+1)^2 + y^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + \cancel{1} + y^2(x^2 - \cancel{2x} + 1 + x^2 + \cancel{2x} + 1) + y^4 = \cancel{1}\ 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2y^2 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow (x,y)\in c \ !$$

e) Polarkoord. $\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \Rightarrow x^2+y^2 = r^2$ und

$$(x,y)\in c \Leftrightarrow r^4 - 2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2(r^2 - 2\underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{=\cos 2\varphi}) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ (Doppelpkt) } \vee \ r = r(\varphi) = \pm\sqrt{2\cos(2\varphi)},\ \varphi\in\left[-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right]$$

f) 0 ist singulärer Punkt von c (d.h. $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Tgtn in 0 mit Hilfe der Taylor Entwicklung von F um (0,0)

2. Ordnung: $T_2(x,y) \underset{\uparrow}{=} -2(x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$

Weglassen höherer Potenzen in x und y als 2. Potenz

Alternativ über $\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot x(\varphi) \\ \dot y(\varphi) \end{pmatrix}$ an Stelle $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ mit lim

g) berandete Fläche: $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (r(\varphi))^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1$