SS 2015 Analysis 4 LB Hausaufgaben Blatt 4

Notiztitel 06.05.2011

H7. $f(x,y) = y\cdot\sin(\pi x) \Rightarrow \begin{array}{l} f_x = \pi\cdot y\cdot\cos(\pi x) \\ f_y = \sin(\pi x) \end{array}$

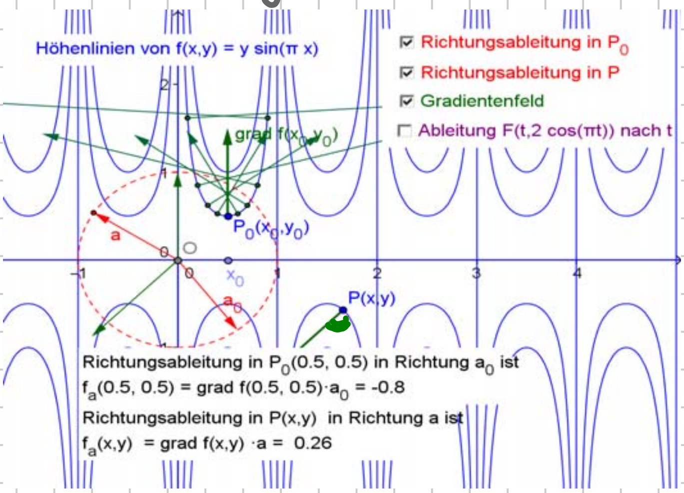
a) $\operatorname{grad} f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} f_x(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \\ f_y(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ mit $|\underline{v}| = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = 1$

$\Rightarrow$ Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial \underline{v}} f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \operatorname{grad} f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \underline{\frac{-4}{5}}$

Skalarprod.

b) $f(x,y) = c = \text{const}$ lässt sich hier nach y auflösen

$y = y(x) = \frac{c}{\sin(\pi x)}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$



Für $c=0$ ergeben sich

$y=0 \vee x = k \in \mathbb{Z}$

als Höhenlinien!

Der Gradient $\operatorname{grad} f(x,y)$ steht in jedem Punkt (x,y) auf der Höhenlinie durch (x,y) senkrecht $\rightarrow$ Gradientenfeld.

<u>Vertikale Schnitte des Graphen $z = f(x,y)$</u>

$x = x_0 = \text{const} \Rightarrow z = y\cdot\sin(\pi x_0)$ Geraden $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sin(\pi x_0) \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$

$y = y_0 = \text{const} \Rightarrow z = y_0\cdot\sin(\pi x)$ Sinuslinien in „xz-Ebene"

c) $z(t) = f(t, \cos(\pi t)) \rightarrow \frac{dz}{dt} = ?$

<u>1. Weg:</u> mit Kettenregel Betrachte $f(x,y)$ längs Kurve

$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi\sin(\pi t) \end{pmatrix}$ und $z(t) = f(\underline{x}(t))$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x(\underline{x}(t)) \\ f_y(\underline{x}(t)) \end{pmatrix}}_{= \operatorname{grad} f(\underline{x}(t))} \cdot \dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} \pi\cos^2(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi\sin(\pi t) \end{pmatrix} = \pi(\cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t))$$

Skalarprod.

$$= \underline{\pi\cdot\cos(2\pi t)}$$

2. Weg: direkt durch „Einsetzen" von $\underline{x}(t)$ in $f(x,y)$

$z(t) = f(t, \cos(\pi t)) = \cos(\pi t) \cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi t)$

$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \underline{\pi \cos(2\pi t)}$

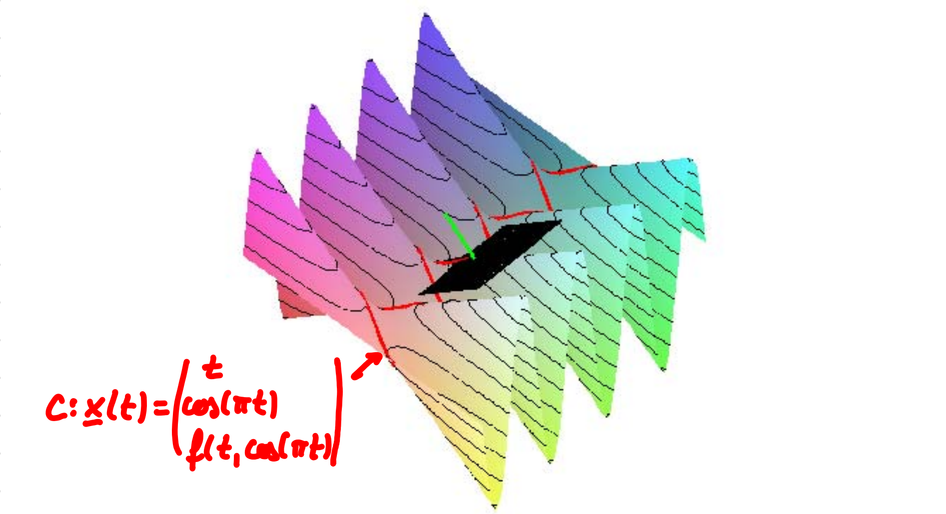
d) Der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ liegt auf dem Graphen von f, da $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Die Tangentialebene τ an den Graphen $z = f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ besitzt den Normalenvektor $\underline{n}_0 = (\operatorname{grad} f(x_0,y_0), -1)^T$

$\Rightarrow \tau: \underline{n}_0 \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} \right) = 0$ also $\tau: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) = 0$

$\Leftrightarrow y - \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y - z = 0}$ (Ebene durch x-Achse)

vgl. auch Maple-File zu Blatt 4.



H 8. $u(x,y,t) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$

$u_x = \frac{1}{t}\cdot\left(-\frac{x}{2t}\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$; $u_{xx} = \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2t} + \left(-\frac{x}{2t}\right)^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$

$u_y = \frac{1}{t}\cdot\left(-\frac{y}{2t}\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$; $u_{yy} = \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2t} + \left(-\frac{y}{2t}\right)^2\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$

$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = \left[-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{4t^3}(x^2+y^2)\right]\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$

$u_t = \left(\frac{-1}{t^2} + \frac{1}{t}\cdot\left(+\frac{x^2+y^2}{4t^2}\right)\right)\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) = u_{xx} + u_{yy} \qquad \square$