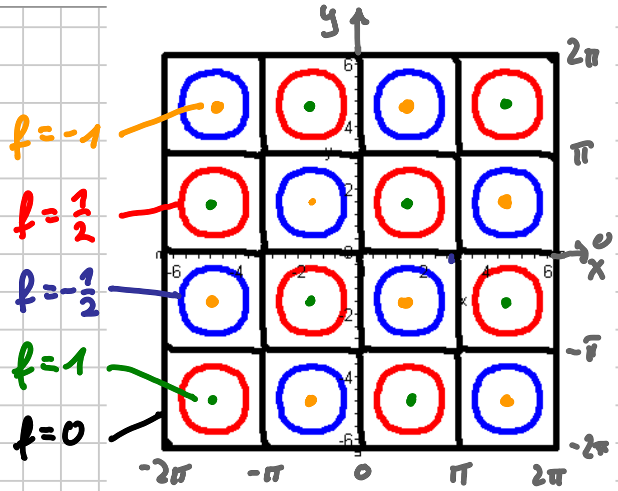
SS 2015 Analysis 4 LB Übungen Blatt 3

Notiztitel 19.05.2011

<u>T9</u> $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y$



a) <u>Niveaulinien</u>

- $f(x,y) = 0$

  $\Leftrightarrow \sin x = 0$ oder $\sin y = 0$

  $\Leftrightarrow x = k_1\pi$ oder $y = k_2\pi$

  mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

- $f(x,y) = 1$ (beachte $|\sin x| \leq 1$ und $|\sin y| \leq 1$)

  $\Leftrightarrow$ ($\sin x = 1$ <u>und</u> $\sin y = 1$) oder ($\sin x = -1$ <u>und</u> $\sin y = -1$)

  $\Leftrightarrow$ ($x = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$ <u>und</u> $y = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$) oder ($x = \frac{3\pi}{2} + 2k_1\pi$ <u>und</u> $y = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi$)

- $f(x,y) = -1$

  $\Leftrightarrow$ ($\sin x = -1$ und $\sin y = 1$) oder ($\sin x = 1$ <u>und</u> $\sin y = -1$)

  $\Leftrightarrow$ ($x = \frac{3\pi}{2} + 2k_1\pi$ <u>und</u> $y = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$) oder ($x = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$ <u>und</u> $y = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi$)

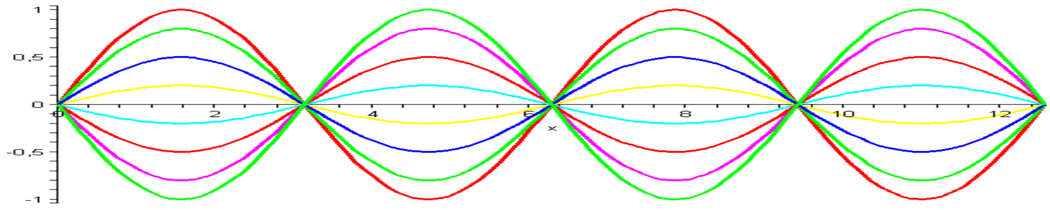
b) $\left.\begin{array}{l} f > 0 \\ f < 0 \end{array}\right\}$ siehe Bild | allgemein sind Höhenlinien implizit gegeben durch $f(x,y) = c$. Kurvenpunkte (x_0, y_0) findet man bei vorgeg. x_0 als Lösungen von $f(x_0, y) = c$ oder umgekehrt bei vorgeg. y_0 als Lösungen von $f(x, y_0) = c$.

Hier kann man $f(x,y) = c$ explizit nach y (oder nach x) auflösen als: $\sin x \sin y = c \underset{x \neq k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \sin y = \frac{c}{\sin x} \Leftrightarrow y = \arcsin\frac{c}{\sin x}$

$\boxed{|c| < 1\ !}$

Das ist aber nur ein Teil der Höhenlinie, da mit (x_0, y_0) auch $(x_0, \pm\pi - y_0)$, $(x_0 + \pi, -y_0)$ und $(x_0 + \pi, \pm\pi + y_0)$ die Gleichung $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y = c$ löst, und wegen der Periodizität der Sinusfkt jeweils noch $(2k_1\pi, 2k_2\pi)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ addiert werden darf. vgl. StehendeWelle.ggb !

c) vertikale Schnitte $\quad x=c:\ f=\sin c\cdot\sin y$ $\quad y=c:\ f=\sin x\cdot\sin c$ $\quad$ mit $-1\le\sin c\le 1$



T10. $f(x,y)=\sin x\,\sin y \Rightarrow \operatorname{grad} f=\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos x\,\sin y\\ -\sin x\,\cos y\end{pmatrix}$

$$\operatorname{grad} f=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos x\cdot\sin y=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k_1\pi \vee y=k_2\pi & (1)\\ \quad\underline{\text{und}} & \\ -\sin x\cdot\cos y=0 \Leftrightarrow x=k_3\pi \vee y=\frac{\pi}{2}+k_4\pi & (2)\end{cases}$$

$$\overset{(1)\ \underline{\text{und}}\ (2)}{\Leftrightarrow}\left(x=\frac{\pi}{2}+k_1\pi \wedge y=\frac{\pi}{2}+k_4\pi\right) \text{ oder } \left(x=k_3\pi \wedge y=k_2\pi\right)$$

offenbar Maxima und Minima | Tangentialebene horizontal aber keine Extrema !

T11 a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad$ (stetig in $(0,0)$ nach E01 Blatt 1)

- $\boxed{(x,y)\neq(0,0)}$

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2-3y^2)(x^2+y^2)-(x^3-3xy^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{3x^4-3y^4-2x^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-3y^4+6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-6xy(x^2+y^2)-(x^3-3xy^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{-6x^3y-\cancel{6xy^3}-2x^3y+\cancel{6xy^3}}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-8x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f(x,y))=\begin{pmatrix}f_x(x,y)\\ f_y(x,y)\end{pmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}x^4-3y^4+6x^2y^2\\ -8x^3y\end{pmatrix}$$

• $\boxed{(x,y)=(0,0)}$ Part. Abl. direkt mit Differentialquotienten.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \overset{f(0,0)=0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{(0+h)^3-3(0+h)\cdot 0^2}{(0+h)^2+0^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = \underline{\underline{1}}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \overset{f(0,0)=0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{0^3-3\cdot 0\cdot(0+h)^2}{0^2+(0+h)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f(0,0)) = \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f ist somit einmal partiell nach x und y diff'bar aber f_x und f_y sind in $(0,0)$ <u>nicht</u> stetig, da b)

Sind f_x und f_y ergänzt um $f_x(0,0)=1$ und $f_y(0,0)=0$ stetig?

b) Betrachte $\underset{x\neq 0}{y=2x} \Rightarrow f_x(x,2x) = \dfrac{x^4-48x^4+24x^4}{25x^4} = -\dfrac{23}{25}$

(allgem. Ansatz $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$) $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f_x(x,2x) = -\dfrac{23}{25} \neq 1$!!

Betrachte $\underset{x\neq 0}{y=x} \Rightarrow f_y(x,x) = \dfrac{-8x^4}{4x^4} = -2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f_y(x,x) = -2 \neq 0$!!

$\Rightarrow$ f_x und f_y sind in $(0,0)$ nicht stetig.

<u>Anmerkung</u>: Übergang zu Polarkoord. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_x(r,\varphi) = \cos^4\varphi - 3\sin^4\varphi + 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\ f_y(r,\varphi) = -8\cos^3\varphi\sin\varphi \end{array}\right\}$$

für $r=0$ in $(0,0)$ abhängig von φ!