SS 2015 Analysis 4 LB Hausaufgaben Blatt 3

Notiztitel 19.05.2011

H5 $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ in $(0,0)$ nicht stetig nach H2.

a) Höhenlinien $f(x,y) = c = \text{const} \Leftrightarrow 2xy = c\cdot(x^2+y^2)$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{quad. Gleichung in } y}}{c y^2 - 2xy + cx^2 = 0} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Auflösen nach } y \text{ für } c \neq 0\,!}}{\Rightarrow} y_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4c^2x^2}}{2c} = x\cdot\frac{1\pm\sqrt{1-c^2}}{c}$$

$\Rightarrow$ Für $c \neq 0$ und $|c| \leq 1$ (sonst Wurzel nicht reell!) sind die Höhenlinien Geradenpaare durch den Ursprung.

Für $c = 0$ folgt direkt: $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

das sind die Koordinatenachsen (vgl. Figur zu H2)

b) Aus a) ist bekannt, dass für $|c| \leq 1$ jeweils Höhenlinien existiert, diese für $|c| > 1$ imaginär wären

$\Rightarrow W_f = [-1, 1]$

c) $f_x = \dfrac{2y(x^2+y^2) - 2xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$

$f_y = \dfrac{2x(x^2+y^2) - 2xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\begin{pmatrix} y(y^2-x^2) \\ x(x^2-y^2) \end{pmatrix}$$

Da f in $(0,0)$ nicht stetig, kann f dort nicht diff.bar sein!

d) $$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^2-x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \pm x & (1) \\ \text{und} & \\ x(x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = \pm x & (2) \end{cases}$$

$\underset{(0,0)\notin D}{\overset{(1) \text{ und } (2)}{\Rightarrow}}$ $y = \pm x$, $x \neq 0$, unterste und oberste Höhenlinie für $c = -1$ bzw. $c = +1$

d.h. f hat längs $y = x, x \neq 0$ Maxima, längs $y = -x$ Minima

H6 $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ ist in $(0,0)$ <u>nicht</u> stetig
vgl. Vorl.bsp. Parabelfalte

a) <u>Höhenlinien</u>: $f(x,y) = c = \text{const} \Leftrightarrow xy^2 = cx^2 + cy^4$

$\Leftrightarrow cx^2 - xy^2 + cy^4 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{y^2 \pm \sqrt{y^4 - 4c^2y^4}}{2c} = y^2 \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1-4c^2}}{2c}$

quad. Gleichung in x   Auflösen nach x

$\Rightarrow$ <u>Für $c \neq 0$</u> und $|c| \leq \frac{1}{2}$ (sonst Wurzel nicht reell!) sind die Höhenlinien Parabelpaare durch den Ursprung.

<u>Für $c = 0$</u> folgt direkt: $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow xy^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$
das sind die Koordinatenachsen (vgl. Figur zu Parabelfalte)

b) Aus a) ist bekannt, dass für $|c| \leq \frac{1}{2}$ jeweils Höhenlinien existiert, diese für $|c| > \frac{1}{2}$ imaginär wären
$\Rightarrow W_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

c) $f_x = \frac{y^2(x^2+y^4) - xy^2 2x}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^2(y^4-x^2)}{(x^2+y^4)^2}$

$(x,y) \neq (0,0)$

$f_y = \frac{2xy(x^2+y^4) - xy^2 \cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$

$\Rightarrow \quad \text{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^4} \begin{pmatrix} y^2(y^4-x^2) \\ 2xy(x^2-y^4) \end{pmatrix}$

d) $\text{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(y^4-x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = \pm y^2 & (1) \\ \underline{\text{und}} & \\ 2xy(x^2-y^4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \vee x = \pm y^2 & (2) \end{cases}$

(1) und (2) $\Rightarrow$ $(0.0) \notin D$ $\quad y = 0 \vee \underline{x = \pm y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ unterste bzw. oberste Höhenlinie für $c = \pm\frac{1}{2}$, vgl. Figur zu Parabelfalte

d.h. f hat längs $x = y^2, x \neq 0$ Maxima, längs $x = -y^2, x \neq 0$ Minima
ob längs $y = 0$ Extrema vorliegen, klären wir später.