SS 2015 Analysis 4 LB Hausaufgaben Blatt 2

Notiztitel 11.05.2011

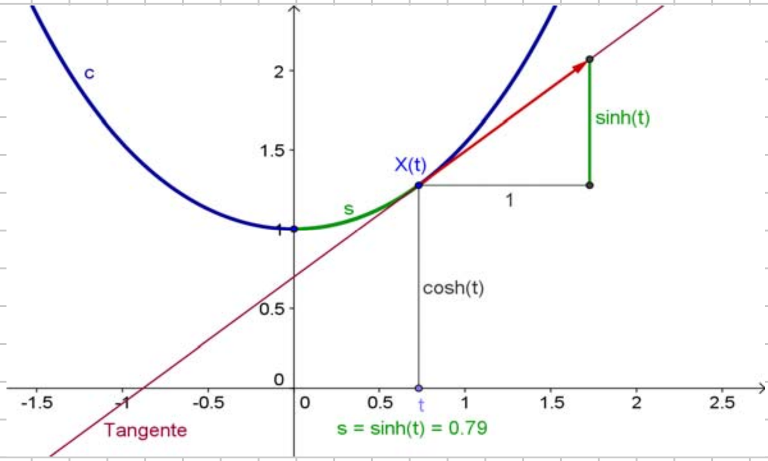
H3. c: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \neq 0$ d.h. c ist regulär

$(\dot{\vec{x}}(t))^2 = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$ (*)

F.S. bzw. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 e^x \cdot e^{-x} = \underline{\underline{1}}$

$\Rightarrow s = s(t) := \int_0^t \sqrt{(\dot{\vec{x}}(\tau))^2}\, d\tau = \int_0^t \cosh \tau \, d\tau = \sinh \tau \Big|_0^t = \underline{\underline{\sinh t}}$

vgl. Tangentensteigung!



d.h. Die Steigung der Funktion $\cosh t$ ist an der Stelle t gleich der Länge des Graphen von $(0,1)$ bis $(t, \cosh t)$!

H4. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$, $\underline{t > 0}$ $\quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -t \sin t \\ t \cos t \\ 2t \end{pmatrix}$

a) $\dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0}$ wegen $\underline{t > 0}$ und 3. Komponente $\Rightarrow$ c regulär

b) $|\dot{\vec{x}}(t)| = \sqrt{(\dot{\vec{x}}(t))^2} = \sqrt{t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 4t^2} = \underline{t\sqrt{5}}$

$\Rightarrow s(t) = \int_0^t u\sqrt{5}\, du = \frac{\sqrt{5}}{2} t^2$

c) $\cos \alpha = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \dfrac{2t}{t\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \text{const} \Rightarrow \alpha = \text{const}$

d) $\vec{x}(t)$ in Φ eingesetzt liefert:

$x^2 + y^2 - z = (t\cos t - \sin t)^2 + (t \sin t + \cos t)^2 - (t^2 + 1) =$

$= t^2 + 1 - (t^2 + 1) = 0$ qed.