Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

SS 2015
Blatt 5

Analysis 4 LB
Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Tutoraufgaben:

T16. Sei $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto F(x,y)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$. Dann lässt sich nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen $F(x,y) = c$ in einer Umgebung I von x_0 eindeutig nach $y = f(x)$ "auflösen", d.h. es gibt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x)$ mit $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in I$.

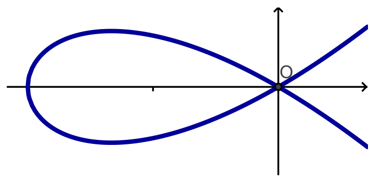
a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f an der Stelle x_0 mit Hilfe der partiellen Ableitungen von F, wenn F zweimal stetig partiell differenzierbar ist.

b) Geben Sie hinreichende Bedingungen für ein Extremum an der Stelle (x_0, y_0) an.

Hinweis: Obiger Satz ist ein Existenzsatz. In vielen Fällen lässt sich f aber nicht explizit durch elementare Funktionen darstellen.

T17. Die skizzierte Kurve c wird implizit beschrieben durch

$$F(x,y) := 3y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$



a) Parametrisieren Sie c durch Schnitt mit dem Geradenbüschel $y = tx,\ \ t \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie explizit, dass $\quad grad(F(x(t), y(t)) \circ (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T = 0 \quad$ gilt.

c) Bestimmen Sie die Tangente an c im Punkt $P = (-0.88\,,\, 0.176)$.

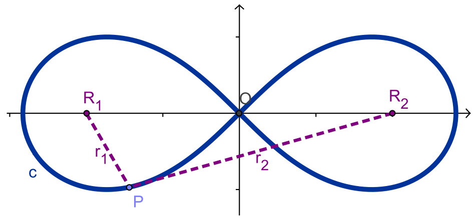
d) Bestimmen Sie die Punkte von c, deren Tangenten parallel zur x-Achse liegen. Welcher davon ist ein Maximum der durch $F(x,y) = 0$ implizit gegebenen Funktion $y = f(x)$?

e) Bestimmen Sie die Tangenten in $O = (0,0)$.

f) Berechnen Sie den Umfang und die Fläche der von c berandeten Fläche.

Hausaufgaben:

H9. Die skizzierte Kurve c wird implizit beschrieben durch



$$F(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0.$$

a) Bestimmen Sie den Punkt (x_0, y_0) von c mit $x_0 = 1$ und $y_0 > 0$.

b) Bestimmen Sie die Tangente an c im Punkt (x_0, y_0).

c) Bestimmen Sie die Punkte von c, deren Tangenten parallel zur x-Achse liegen.

d) Zeigen Sie, dass das Produkt der Abstände jedes Punktes $P = (x, y)$ der Kurve c von den beiden Punkten $R_1 = (-1, 0)$ und $R_2 = (1, 0)$ konstant gleich 1 ist: $|PR_1| \cdot |PR_2| = 1$

e) Zeigen Sie, dass c die Polardarstellung $r = r(\varphi) = \sqrt{2\cos(2\varphi)}$ besitzt.

f) Welche Tangenten ergeben sich in $O = (0, 0)$.

g) Berechnen Sie die Fläche der von c berandeten Fläche.

Ergänzungen:

E5. Gegeben ist

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{2x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

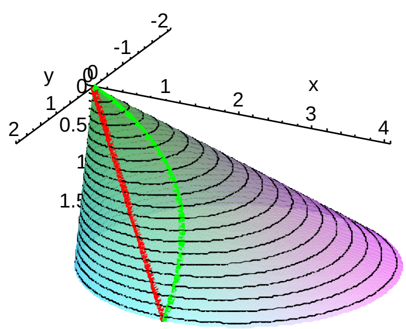
a) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist.

b) Bestimmen Sie die Höhenlinien von f.

c) Geben Sie die Tangentenrichtung $\underline{v}(x_0, y_0)$ der Höhenlinie in (x_0, y_0) an.

d) Zeigen Sie, dass der Kreis $k \subset xy-Ebene$ um den Mittelpunkt $(0, 2)$ durch $(0, 0)$ eine Orthogonaltrajektorie der Höhenlinien von f ist.

e) Vergleichen Sie die Fallinie des Graphen von f längs des Kreises k mit dem vertikalen Schnitt längs $y = x$. Welcher Weg ist die kürzeste Verbindung der Punkte $(0, 0, 0)$ und $(2, 2, 2)$ auf dem Graphen von f?



Abgabetermin: Montag, 1. Juni 2015, in der Übung