Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

SS 2015
Blatt 4

# Analysis 4 LB
## Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

**Tutoraufgaben:**

**T12.** Rechnen Sie für Funktionen $f, g$ nach:

$$\operatorname{grad}(f\,g) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g$$

**T13.** Gegeben ist $f(x,y) = x^2y + xy^3 + x$.

Bestimmen Sie:

a) $\nabla f(1,2)$ und die Richtungsableitung $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{a}} f(1,2)$ für $\mathbf{a}$ in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, wenn $z(t) = f(1+\sin t, 1-\cos t), \quad t \in \mathbb{R}$

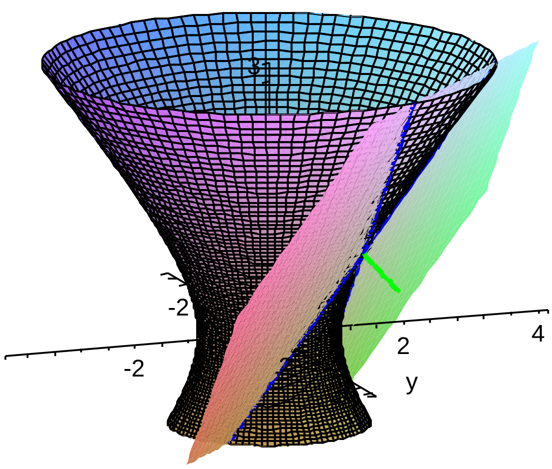
c) eine Gleichung der Tangentenebene an den Graphen von $f$ im Punkt $(1, 2, f(1,2))$.

d) Gibt es Punkte, in denen die Tangentenebene horizontal liegt ($z = c = const$) ?

**T14.** Zeigen Sie, dass $\quad u(x,t) = \dfrac{-2}{\cosh^2(x-4t)} \quad$ die Gleichung $\quad u_t = 6u \cdot u_x - u_{xxx}$ erfüllt.

(Diese Korteweg-De-Vries-Gleichung ist ein mathematisches Modell für die Ausbreitung von Wellen in einem langen Kanal mit seichtem Wasser)

**T15.** Bestimmen Sie die Tangentenebene $\tau$ des Hyperboloids $H: \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$ im Punkt $(1,1,1)$ und zeigen Sie, dass $\tau$ das Hyperboloid $H$ in zwei Geraden schneidet.



**Hausaufgaben:**

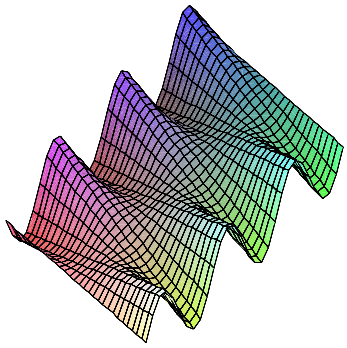
**H7.** Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = y \sin(\pi x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie

a) die Richtungsableitung von $f$ an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in Richtung $\underline{v} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})^T$,

b) eine Skizze der Niveaulinien von $f$ und des Gradientenfeldes,

c) $\frac{d}{dt} f(t, \cos(\pi t)), \quad t \in \mathbb{R}$,

d) die Tangentialebene an den Graphen $z = f(x, y)$ im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



**H8.** Zeigen Sie, dass $u(x, y, t) = \frac{1}{t} \exp(-\frac{x^2 + y^2}{4t})$ für $t > 0$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Wärmeleitungsgleichung

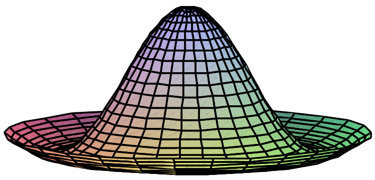
$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

erfüllt.

**Ergänzungen:**

**E4.** Gegeben ist

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Bestimmen Sie:

a) die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} f(\pi/2, 0)$ für $\mathbf{a}$ in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, wenn $z(t) = f(t \cos t, t \sin t), \quad t > 0$

c) eine Gleichung der Tangentenebene an den Graphen von $f$ im Punkt $(\pi/2, 0, 0)$,

d) alle Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , in denen die Tangentenebene an den Graphen von $f$ horizontal liegt ($z = c = const$).

**Abgabetermin:** Montag, 18. Mai 2015, in der Übung