Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

SS 2015
Blatt 1

Analysis 4 LB
Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Tutoraufgaben:

T1. Gegeben ist $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2$.

Bestimmen Sie:

$$a)\ \ f(-2,3) \qquad b)\ \ f(a,a^2) \qquad c)\ \ \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

T2. Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich der folgenden reellen Terme und skizzieren Sie ihn:

a) $T_1(x,y) = \ln((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4))$

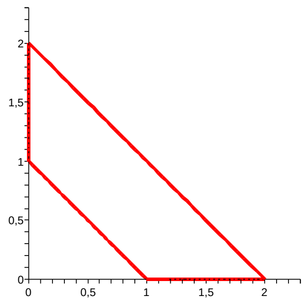
b) $T_2(x,y) = \sqrt{6-2x-3y}$

T3. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y^2/x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f längs der Geraden $y = mx$ (d.h. $f(x,mx)$) für alle $m \in \mathbb{R}$ auch im Ursprung $(0,0)$ stetig ist.
Ist f damit stetig im Ursprung ? Betrachten Sie dazu z.B. f längs der Parabel $y = \sqrt{x}$.

T4. Stellen Sie den nebenstehenden Bereich in Polarkoordinaten dar.



T5. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stellen Sie f in Polarkoordinaten dar und untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

Hausaufgaben:

H1. Gegeben ist $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f.

b) Begründen Sie, warum f im Definitionsbereich stetig ist.

c) Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^2$ die Menge der Nullstellen von f.

d) Beschreiben Sie den Graphen $z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$ im $\mathbb{R}^3$.

H2. Gegeben ist $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$.

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht stetig ergänzbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie f längs $y = mx,\ m \in \mathbb{R}$ oder betrachten Sie f in Polarkoordinaten.

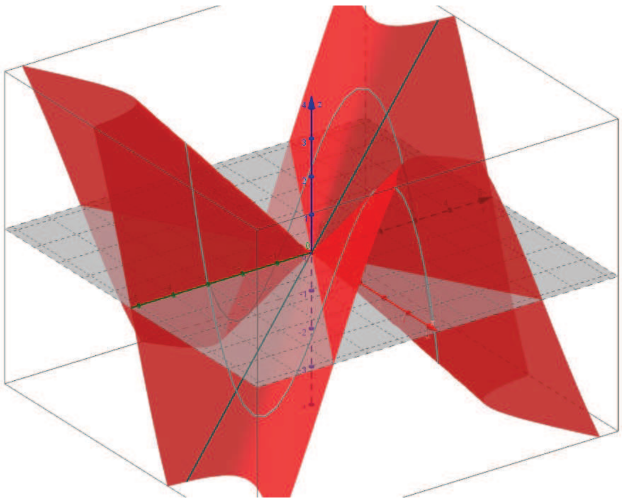
Ergänzungen:

E1. **(Sinuskegel)**
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Stellen Sie f in Polarkoordinaten dar und untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

b) Zeigen Sie, dass die vertikalen Schnitte durch $y = mx$ für alle $m \in \mathbb{R}$ Geraden durch den Ursprung des $\mathbb{R}^3$ sind.
Welche Gestalt hat demnach der Graph von f?



Abgabetermin: Montag, 27. April 2015, in der Übung